

Лекция 19

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И СВОЙСТВА СКЕЙЛИНГА В СЛУЧАЕ ЧИСЛА ВРАЩЕНИЯ, ЗАДАННОГО ЗОЛОТЫМ СРЕДНИМ

В предыдущей лекции мы изложили результаты РГ анализа для критической точки, отвечающей иррациональному числу вращения, заданному золотым средним $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. В этой лекции будут рассмотрены выводы относительно динамики в критической точке GM и в ее окрестности, которые можно сделать на основании РГ анализа.

Чтобы пояснить смысл критической точки GM, представим себе, что мы движемся на плоскости параметров (r, k) от $k = 0$ в сторону увеличения параметра k вдоль линии постоянного числа вращения $w = \omega$ (рис. 19.1). При $k = 1$ она оканчивается,

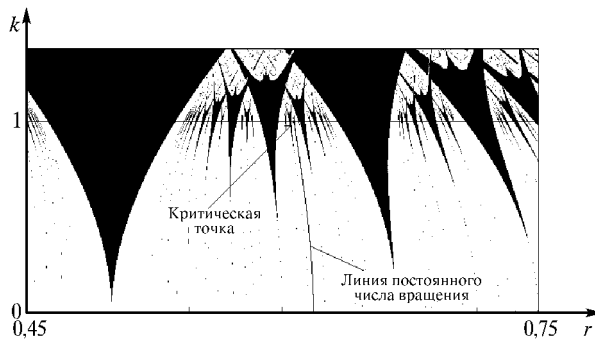


Рис. 19.1. Траектория на плоскости параметров (линия постоянного иррационального числа вращения $(\sqrt{5} - 1)/2$) и критическая точка, отвечающая моменту перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения

и здесь располагается критическая точка. Как мы увидим, в ней аттрактор перестает быть гладким тором и превращается во фрактальный объект.

19.1. Критический аттрактор GM

Предположим сначала, что параметры исходного отображения выбраны точно соответствующими критической точке GM. Тогда, согласно результатам РГ анализа, операторы эволюции в критической точке за интервалы времени, даваемые (асимптотически большими) числами Фибоначчи F_m , определяются универсальной функцией; при этом на каждом очередном шаге m пересчет масштаба динамической переменной производится на фактор $\alpha = -1,28857\dots$. Отсюда следует, что структура критического аттрактора в окрестности кубической точки перегиба должна воспроизводить себя при указанном пересчете масштаба.

Попытка проиллюстрировать это свойство скейлинга на обычной итерационной диаграмме оказывается не очень удачной: траектория плотно заполняет критический аттрактор из-за присущей квазипериодической динамике эргодичности, и детали структуры становятся неразличимы. Используем поэтому диаграмму, выполненную в технике кодирования тонами серого цвета подобно портретам аттракторов в конце лекции 8 (рис. 19.2). Более темные области на диаграмме соответствуют большему относительному

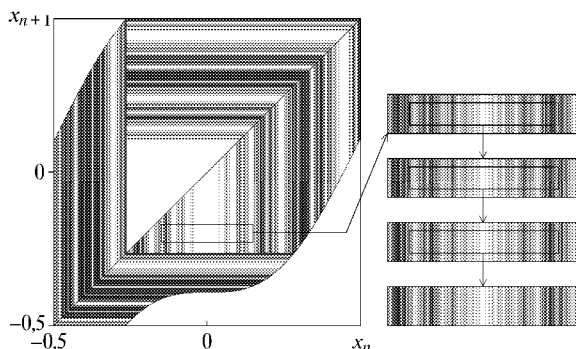


Рис. 19.2. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры на аттракторе отображения окружности в критической точке GM. При выводе каждой точки на экран компьютера число, кодирующее яркость в данном пикселе, увеличивается на единицу. Вставка показывает фрагмент изображения в окрестности точки перегиба отображения окружности и результат последовательного увеличения с изменением масштаба от уровня к уровню в α раз

времени пребывания, а более светлые — редкому посещению. По существу картина отражает распределение инвариантной меры на критическом аттракторе.

Если выделить фрагмент картины вблизи точки перегиба, то можно убедиться, что структура полос в нем воспроизводит себя при изменении масштаба на фактор α (с изменением ориентации, поскольку фактор отрицателен).

Таким образом, фрактальные свойства критического аттрактора на пороге разрушения квазипериодичности проявляются в распределении на нем инвариантной меры. Эту меру можно исследовать с помощью следующего приема. Рассмотрим отображение окружности на себя, состоящее в повороте на фиксированный угол:

$$y_{n+1} = y_n + w \pmod{1}, \quad (19.1)$$

где $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ и попытаемся найти такую функцию $\varphi(y)$, чтобы $x_n = \varphi(y_n)$ в точности давала последовательность итераций отображения окружности в критической точке GM. Функции $x = \varphi(y)$ и $y = \varphi^{-1}(x)$ будут определять замену, переводящую отображение поворота в критическое отображение окружности и обратно. Для y инвариантная мера отвечает, очевидно, равномерному распределению на единичном интервале $[0, 1)$. Соответственно, плотность распределения для x будет получаться как $\rho(x) = \int \delta(x - \varphi(y)) dy$.

График функции $\varphi(y)$ можно построить численно следующим образом: стартуем из $x = 0$, $y = 0$ и будем итерировать одновременно критическое отображение окружности (18.11) и отображение поворота (19.1), откладывая получаемые пары величин в координа-

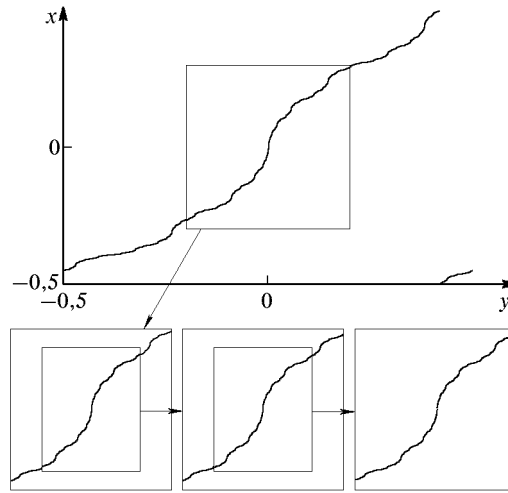


Рис. 19.3. Построенный численно график функции $x = \varphi(y)$, которая определяет замену, приводящую критическое отображение окружности к отображению поворота. Для иллюстрации свойства скейлинга, присущего этой фрактальной кривой, фрагмент графика воспроизводится на нескольких последовательных шагах пересчета масштаба по оси x на фактор $\alpha = -1,28857$ и по оси y на фактор $\beta = -(\sqrt{5} + 1)/2$

тах (y, x) . Полученный таким образом график показан на рис. 19.3 и он выглядит как фрактальная кривая. Чтобы убедиться в наличии масштабного подобия, выделим фрагмент кривой в окрестности точки $(0, 0)$. При пересчете масштаба по оси x на фактор α и по оси y на фактор $\beta = -(\sqrt{5} + 1)/2$ картина воспроизводит себя тем с большей точностью, чем глубже уровень разрешения.

Для анализа критического аттрактора можно привлечь мультифрактальный формализм (Halsey, 1986). Построим последовательность x_n , порождаемую критическим отображением окружности при старте из $x_0 = 0$ для $n = 1, 2, \dots, F_{m+1}$, где F_{m+1} —

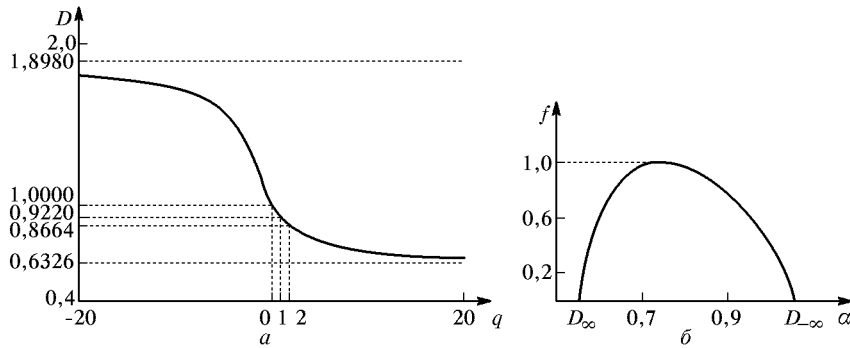


Рис. 19.4. Спектр обобщенных размерностей (а) и скейлинг спектр (б) для критического аттрактора отображения окружности в точке GM

некоторое достаточно большое число Фибоначчи. Пусть l_n обозначает длину интервала между точками x_n и $x_{n+F_{m-1}}$, вычисленную по модулю 1. Каждому интервалу l_n , $n = 1, \dots, F_{m-1}$, припишем одинаковую меру (вероятность) $p_n = p = 1/F_m$. Далее, определим суммы вида

$$\Gamma_{q\tau}^{(m)} = \sum_{i=1}^{F_m} \frac{p^q}{l_i^\tau} = F_m^{-q} \sum_{i=1}^{F_m} l_i^{-\tau} \quad (19.2)$$

и потребуем, чтобы при $k \rightarrow \infty$ они не убывали к нулю и не росли в бесконечность. Для этого полагаем

$$q(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \Gamma_{q\tau}^{(m)}}{\log F_m}. \quad (19.3)$$

Имея функцию $q(\tau)$, строим график обобщенной размерности как зависимость между величинами $q = q(\tau)$ и $D(q) = \tau/(q - 1)$, а также скейлинг-спектр как зависимость между $\alpha = d\tau/dq$ и $f = \alpha q - \tau$ (рис. 19.4).

Заметим, что размерность Хаусдорфа $D(0)$ равна 1. (Так и должно быть, поскольку существует непрерывная замена, сводящая критическую динамику к отображению поворота (19.1).) Однако критический аттрактор все же фрактал, о чем говорит наличие нетривиальных дробных информационной и корреляционной размерностей: $D(1) = 0,9220$ и $D(2) = 0,8664$. При $q \rightarrow \pm\infty$ имеем $D(-\infty) = \log w^{-1} / \log |\alpha| = 1,8980$ (максимальная размерность) и $D(\infty) = \log w^{-1} / \log |\alpha|^3 = 0,6326$ (минимальная размерность). Скейлинг-спектр располагается в интервале изменения α от $D(\infty)$ до $D(-\infty)$ и имеет экстремум, равный величине хаусдорфовой размерности аттрактора $f_{\max} = D(0) = 1$.

Перейдем к обсуждению спектра Фурье критического аттрактора. Поскольку переменная x имеет смысл фазы, то все физически значимые величины должны зависеть от нее периодически.

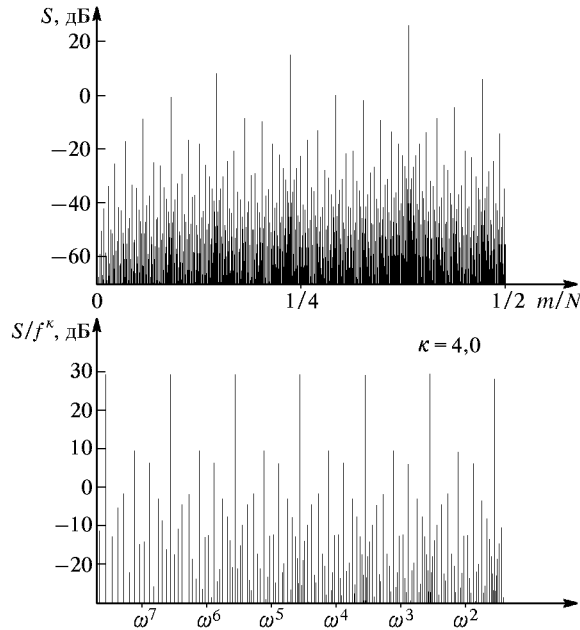


Рис. 19.5. Спектры Фурье для критической динамики отображения окружности (аппроксимация циклом периода $N = F_{17} = 1597$). На верхней диаграмме использован логарифмический масштаб по оси амплитуд и обычный пропорциональный по оси частот. На нижней диаграмме использован логарифмический масштаб по обоим осям, и при этом спектральные интенсивности отнесены к f^κ , где показатель $\kappa \approx 4,0$ подобран эмпирически

Следовательно, мы должны интересоваться спектральным составом не самой по себе последовательности x_n , а последовательностей вида $s_n = F(x_n)$, где F — некоторая функция периода 1.

Для практического построения спектра возьмем близкое к критическому, но не равное ему значение параметра r в отображении окружности, так, чтобы при $k = 1$ реализовался стартующий из $x = 0$ цикл с периодом равным достаточно большому числу Фибоначчи, скажем, $N = F_{17} = 1597$. Далее, вычисляем амплитуды компонент Фурье стандартным образом:

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(x_n) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn\right). \quad (19.4)$$

При этом $f = m/N$ есть частота m -й компоненты, а квадрат модуля коэффициента — ее интенсивность $S(f) = S(m/N) = |c_m|^2$. Что касается функции F , то ее зададим просто в виде $F(x) = \sin 2\pi x$.

На рис. 19.5 (верхняя диаграмма) спектр показан в том виде, который обычно используется в экспериментальных исследованиях: по оси абсцисс отложена частота, а по оси ординат — амплитуда компонент в логарифмическом масштабе $S(\text{дБ}) = 10 \lg |c_m|^2$. Чтобы сделать видимыми присущие спектру свойства подобия, используют двойной логарифмический масштаб (рис. 19.5, нижняя диаграмма). Как можно заметить, относительная высота и взаимное расположение пиков воспроизводят друг друга с правильной периодичностью по оси логарифма частот.

19.2. Скейлинг на критической линии

Выведем отображение из критической точки изменением параметра расстройки r , оставив величину k неизменной и равной 1. При этом отображение сохраняет кубическую точку перегиба с нулевыми первой и второй производными в ней. В решении линеаризованного уравнения РГ

$$g_m(x) = g(x) + C_1 \delta_1^m h_1(x) + C_2 \delta_2^m h_2(x) \quad (19.5)$$

коэффициент C_1 будет пропорционален $r - r_c$, а коэффициент C_2 будет нулевым: наличие добавки $h_2(x)$ привело бы к «разрушению» точки перегиба и уходу с критической линии. Таким образом, асимптотическое выражение для перенормированного оператора эволюции за F_m шагов принимает вид

$$g_m(x) = g(x) + \text{const} \cdot (r - r_c) \delta_1^m h_1(x).$$

Если уменьшить отклонение от критической точки в $\delta_1 = -2,8336 \dots$ раз, то форма оператора эволюции за F_{m+1} шагов будет такой же, какой она была для F_m шагов при старом значении параметра. Следовательно, характер динамики должен быть аналогичным, но с временным масштабом в $F_{m+1}/F_m = \omega^{-1} = 1,6180 \dots$

раза больше. Соответственно, значение ляпуновского показателя будет в такое же число раз меньше.

На рис. 19.6 вверху показан график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра расстройки вдоль линии $k = 1$. «Провалы» ниже нуля соответствуют обла-

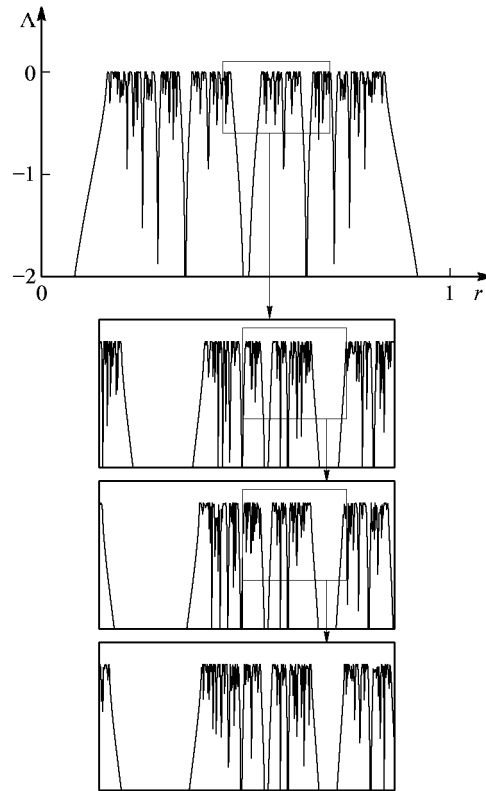


Рис. 19.6. Вверху — график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра r при $k = 1$. Каждый следующий рисунок представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Пересчет масштаба по оси параметра r производится на фактор $\delta_1 = -2,8336\dots$, а по оси ляпуновского показателя — в $\omega^{-1} = 1,6180\dots$ раза

стям периодичности, т. е. языкам Арнольда, а множество точек, где показатель нулевой, — множеству сохранившихся на критической линии квазипериодических режимов. В нижней части рисунка представлены диаграммы, показывающие детали структуры в окрестности точки $r = r_c$, так что каждая последующая представляет собой увеличенный фрагмент предыдущей. При этом масштаб по оси ляпуновского показателя пересчитывается в ω^{-1} раз,

а по оси параметра r — в δ_1 раз относительно критической точки $r = r_c$. Можно видеть, что графики хорошо воспроизводятся на разных уровнях разрешения. На более глубоких уровнях степень соответствия, как можно ожидать, будет еще выше.

Другим проявлением скейлинга служит масштабное подобие «чертовой лестницы» в окрестности той ее точки, где число вращения равно золотому среднему. Как известно, при переходе к аппроксимации золотого среднего очередной подходящей дробью погрешность уменьшается на фактор $v = (-w^{-2})$ (знак минус означает, что погрешность попеременно положительная или отрицательная). Это будет фактор скейлинга по вертикальной оси. По горизонтальной оси фактором скейлинга служит, как следует из

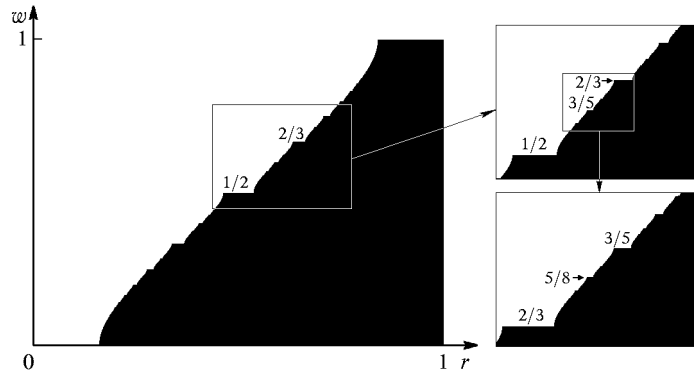


Рис. 19.7. Иллюстрация скейлинга «чертовой лестницы» в окрестности точки, где число вращения равно золотому среднему. Структура воспроизводит себя при пересчете масштаба на фактор $\delta_1 = -2,8336\dots$ по горизонтали и $v = (-w^{-2}) = -2,6180\dots$ по вертикали

проведенных рассуждений, константа δ_1 . Если выделить фрагмент «чертовой лестницы» вблизи соответствующей точки и представить его с увеличением на указанные факторы по осям координат, то конфигурация ступеней воспроизведет себя (рис. 19.7).

19.3. Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров

Как мы видели, из результатов РГ анализа, вблизи критической точки GM выражение для оператора эволюции, получаемое при многократных итерациях РГ преобразования, зависит от двух параметров — коэффициентов C_1 и C_2 . Если построить карту динамических режимов на плоскости этих параметров, то она, очевидно, будет обладать свойством *двумерного скейлинга*. Действительно, одновременный пересчет параметров по правилу $C'_1 = C_1/\delta_1$, $C'_2 = C_2/\delta_2$ и увеличение индекса m на единицу оставляет форму оператора эволюции неизменной. Поэтому в точке

(C_1, C_2) и в точке (C'_1, C'_2) будут существовать подобные режимы, отличающиеся масштабом времени, который во второй точке в $1/w$ раз больше. Если неизвестно выражение, связывающее коэффициенты C_1 и C_2 с параметрами исходного отображения, то задача построения системы координат, подходящей для иллюстрации скейлинга, должна быть решена численно с достаточной степенью точности.

В качестве начала координат естественно выбрать саму критическую точку GM. Координатная ось C_1 , как мы уже знаем, должна быть направлена вдоль критической линии $k = 1$, поскольку именно собственная функция h_1 отвечает возмущению, не разрушающему кубическую точку перегиба. Что касается второй

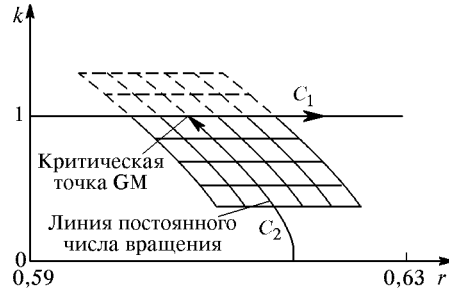


Рис. 19.8. К выбору «скейлинговых координат» вблизи критической точки GM для отображения окружности

координатной линии (C_2), то она, как можно сообразить, должна идти вдоль кривой на плоскости (r, k) , отвечающей постоянному числу вращения, золотому среднему (рис. 19.8). Эту кривую можно найти численно. Используем аппроксимацию полиномом:

$$\Delta k = c_2, \quad \Delta r = ac_2 + bc_2^2 + o(c_2^2), \quad (19.6)$$

где $\Delta = r - r_c$, $\Delta k = k - 1$. Тогда численный расчет дает

$$a = -0,01749, \quad b = -0,00148. \quad (19.7)$$

С учетом сделанных замечаний, связь между «скейлинговыми координатами» (c_1, c_2) и параметрами исходного отображения можно определить как

$$\Delta r = c_1 + ac_2 + bc_2^2, \quad \Delta k = c_1. \quad (19.8)$$

Что принципиально, замена переменных, приводящая к скейлинговым координатам, получилась нелинейной. При этом учет квадратичных членов разложения Тейлора существен, а последующих — нет! Это связано с конкретным, присущим критической точке GM, соотношением факторов δ_1 и δ_2 . Чтобы разъяснить данный момент, представим себе,

что мы рассматриваем серию картинок, показывающих окрестность критической точки на плоскости параметров во все меньших и меньших масштабах, так что $c_1 \propto \delta_1^{-m}$, $c_2 \propto \delta_2^{-m}$. Если мы пренебрегаем коэффициентом разложения в ряд Тейлора при c_2^p , то в коэффициент при первом собственном векторе будет внесена погрешность порядка δ_2^{-pm} . Полный же вклад первого собственного вектора с учетом его нарастания по закону δ_1^m будет порядка $\delta_1^m \delta_2^{-pm}$. Этот вклад не опасен и исчезает при

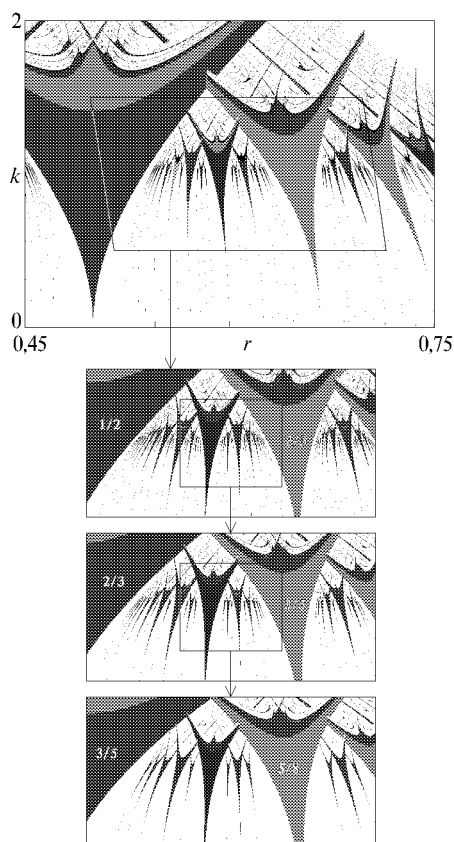


Рис. 19.9. Иллюстрация двумерного скейлинга картины языков Арнольда на карте динамических режимов отображения окружности вблизи критической точки GM. Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0,1$ и $c_2 = \pm 0,5$. Попадая внутрь этого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно в координатах (c_1, c_2) . Пересчет масштаба на вставках от уровня k уровню производится на факторы $\delta_1 = -2,8336\dots$ и $\delta_2 = 1,6604\dots$, соответственно, по горизонтали и вертикали. Цифрами в основных языках Арнольда указаны числа вращения

$m \rightarrow \infty$, если $|\delta_1| < |\delta_2^p|$. В нашем случае $\delta_1 = -2,83361$ и $\delta_2 = 1,66044$, так что $|\delta_2| < |\delta_1|$ и $|\delta_2^2| < |\delta_1|$, но $|\delta_2^p| > |\delta_1|$ при $p \geq 3$. Следовательно, в (19.8) достаточно учитывать линейный и квадратичный члены по c_2 .

На рис. 19.9 иллюстрируется двумерный скейлинг картины языков Арнольда вблизи критической точки GM. На верхней диаграмме по осям координат отложены параметры исходного отображения, r и k . Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0,1$ и $c_2 = \pm 0,5$. Далее, попавшая внутрь этого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно, теперь уже в координатах (c_1, c_2) , а затем воспроизведена с пересчетом масштаба на факторы δ_1 и δ_2 по соответствующим осям координат. Поскольку фактор δ_1 отрицателен, картина инвертируется по горизонтали при каждом масштабном пересчете. Обратите внимание, как при этом перенумеровываются языки Арнольда: если число вращения было F_{m-1}/F_m , то для аналогичного языка на следующей картинке оно оказывается равным F_m/F_{m+1} .

Как и универсальность Фейгенбаума, имевшая место при удвоениях периода, критическая точка GM, может встречаться не только в одномерных отображениях, но и в многомерных нелинейных диссипативных системах при переходе к хаосу через квазипериодичность. С общей точки зрения, этот тип критического поведения следует рассматривать как ситуацию *коразмерности два*. Это значит, что она будет возникать в некоторой точке, если пространство параметров двумерное, на линии, если оно трехмерное и т. д. Действительно, чтобы реализовать критическую ситуацию, нужно обеспечить подбором параметров равенство нулю *двух* коэффициентов в (19.5); соответствующая система уравнений $C_1(A, B, C, \dots) = 0$ и $C_2(A, B, C, \dots) = 0$ определит расположение критической точки, линии или поверхности в пространстве параметров исходной задачи (A, B, C, \dots) . В отличие от фейгенбаумской критической точки, имеющей коразмерность один, критическое поведение типа GM труднее обнаружить и наблюдать. Тем не менее, в литературе описаны вполне успешные эксперименты, в которых удалось реализовать критическое поведение типа GM, в частности, при конвекции Релея–Бенара, в электронных системах и др. Были оценены масштабные факторы α и δ , получены спектры Фурье и даже скейлинг-спектры в разумном соответствии с ожидаемыми на основе анализа одномерного отображения окружности (см. Stavans, 1985; обзор Леви, 1987).