

Лекция 17

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

Если в какой-то системе имеет место чередование стадий (фаз) регулярного и хаотического поведения, то говорят о перемежаемости. Например, в гидродинамических течениях встречается перемежающаяся турбулентность, когда течение одновременно имеет в одних пространственных областях плавный, ламинарный, а в других — нерегулярный, турбулентный характер.

В контексте динамических систем термин перемежаемость (английский эквивалент *intermittency*), вошел в обиход после опубликованной в 1980 г. работы французских исследователей Помо и Манневилля (Pomeau, Manneville, 1980). Они указали три типа перемежаемости, которые могут сопровождать переход от периодического движения к хаосу (см. лекцию 14).

Наиболее распространенной является перемежаемость типа I, которая и будет основным предметом обсуждения в данной лекции. Напомним, что ее возникновение ассоциируется с касательной бифуркацией и появлением «коридора» на месте исчезнувших после слияния устойчивой и неустойчивой точек (циклов). Предполагается, что после пребывания в удаленных областях фазового пространства, где динамика сложная и нерегулярная, система всегда возвращается в исходную область (реинжекция) и должна снова и снова проходить через «коридор» (рис. 17.1).

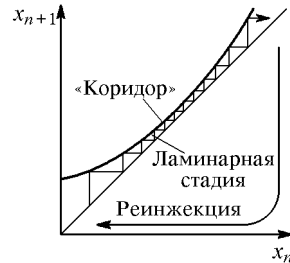


Рис. 17.1. К механизму возникновения перемежаемости типа I

17.1. Перемежаемость типа I: примеры

Следуя Помо и Манневиллю, рассмотрим динамику модели Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy \quad (17.1)$$

при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и значениях r в некотором диапазоне вблизи 166. На рис. 17.2 показаны полученные на компьютере зависимости динамической переменной от времени. На рис. 17.3 приведены фазовые портреты, выполненные в технике кодирования

тонами серого цвета в соответствии с вероятностью пребывания изображающей точки в тех или иных областях.

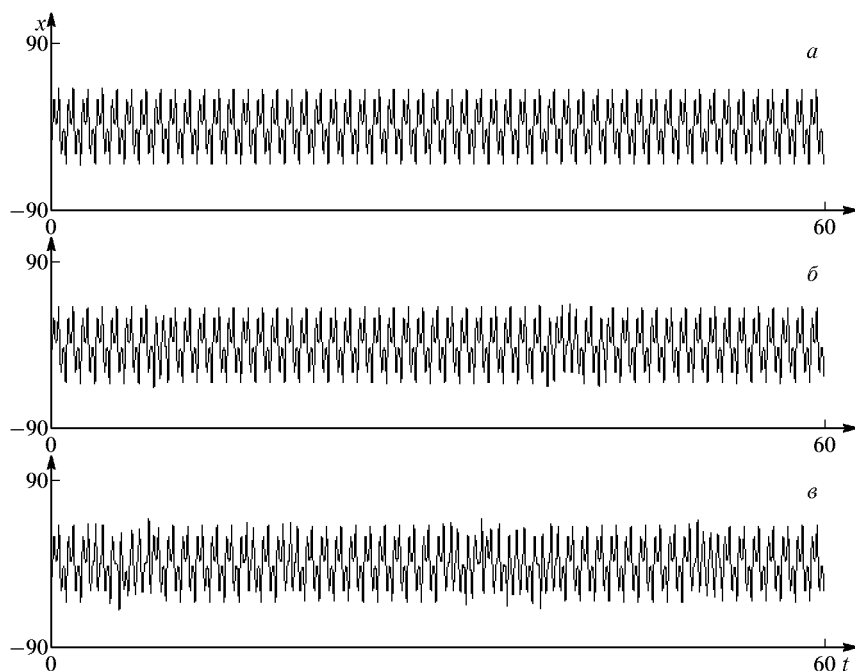


Рис. 17.2. Временные зависимости динамической переменной x в системе Лоренца, иллюстрирующие переход к хаосу через переमेжаемость: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 166$ (а), 166,12 (б), 166,24 (в)

При $r = 166$ реализуется периодический режим, которому в фазовом пространстве отвечает предельный цикл. При r немного большем этой величины, наблюдаются длительные временные

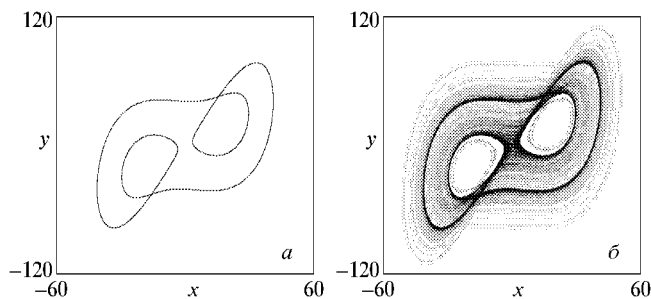


Рис. 17.3. Фазовые портреты аттрактора в проекции на плоскость переменных x , y , иллюстрирующие переход к хаосу через переमेжаемость в системе Лоренца: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 166$ (а), 166,24 (б)

участки регулярного, почти периодического движения — ламинарные стадии, которые перемежаются относительно непродолжительными турбулентными всплесками. Чем дальше мы по параметру от точки возникновения переमेжаемости, тем короче ламинарные стадии. На фазовом портрете можно видеть ярко прорисованную область, близкую по форме к исчезнувшему предельному циклу. В этой области протекает динамика на ламинарных стадиях. Остальная часть портрета, прорисованная бледными тонами, соответствует турбулентным стадиям.

Чтобы прояснить механизм возникновения перемежаемости в системе Лоренца, обратимся к построению сечения Пуанкаре и выберем в качестве секущей поверхности плоскость $x = 0$. Пусть (y_n, z_n) — последовательность точек, в которых фазовая траектория пересекается с этой плоскостью. На рис. 17.4 показана зависимость y_{n+1} от y_n в режиме перемежаемости. Видно, что в выбранном интервале точки располагаются вдоль гладкой кривой, почти касающейся биссектрисы. (Чем ближе мы к точке возникновения перемежаемости, тем ситуация ближе к касанию.) Таким образом, налицо присутствие характерного для перемежаемости типа I «коридора» на итерационной диаграмме, где изображающая точка проводит основное время, а именно, на протяжении ламинарных стадий.

Второй пример — логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = 1 - \lambda x^2. \quad (17.2)$$

Как известно, в области $\lambda > \lambda_c = 1,401155\dots$ наряду с областями хаоса имеется множество окон устойчивости — интервалов параметра, где реализуется аттрактор в виде устойчивого цикла того или иного определенного периода (рис. 17.5). При выходе из окна устойчивости в сторону увеличения параметра можно наблюдать каскад удвоений периода на базе исходного цикла, а выход в сторону уменьшения параметра, как оказывается, сопровождается возникновением хаоса через перемежаемость.

Рассмотрим самое широкое окно, нижняя граница которого расположена при $\lambda = 1,75$ (рис. 17.5). В этом окне реализуется цикл периода 3, итерационная диаграмма которого приведена на рисунке справа. Чтобы понять, что происходит с этим циклом при уменьшении λ , построим график отображения за три шага итера-

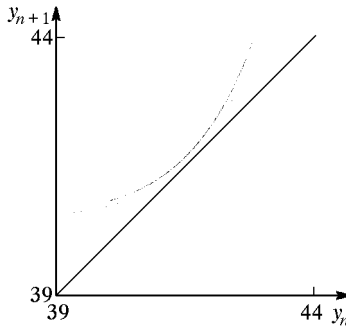


Рис. 17.4. Отображение возврата для переменной y системы Лоренца в режиме перемежаемости: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 166,2$. Секущая поверхность $x = 0$

ций, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ при λ немного большем, равном, и немного меньшем бифуркационного значения 1,75. Соответствующие

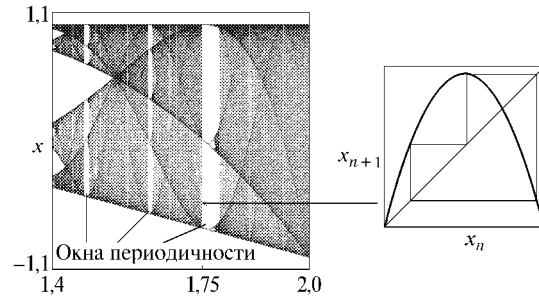


Рис. 17.5. Бифуркационная диаграмма логистического отображения в закритической области (слева) и итерационная диаграмма, отвечающая окну периода 3 (справа). Нижняя граница окна располагается при $\lambda = 1,75$; при переходе через нее в сторону уменьшения λ возникает перемежаемость

диаграммы приведены на рис. 17.6, причем фрагмент, представляющий основной интерес, показан в увеличенном виде (правая часть рисунка). Ясно, что имеет место касательная бифуркация: в результате слияния устойчивой и неустойчивой точек (для ис-

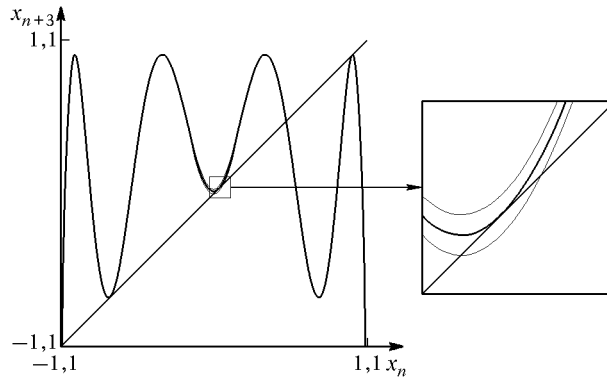


Рис. 17.6. График логистического отображения за три шага итерации при $\lambda = 1,745$ (верхняя кривая), $1,755$ (нижняя кривая) и $1,750$, что соответствует касательной бифуркации

ходного отображения — циклов периода 3) образуется «коридор». Рис. 17.7 иллюстрирует зависимость динамической переменной от дискретного времени для трех значений параметра λ . Первая диаграмма отвечает регулярному режиму — циклу периода 3, вторая и третья демонстрируют перемежаемость. На ламинарных стадиях поведение похоже на периодический режим, однако более тщательный анализ выявляет присутствие медленно накап-

ливающихся возмущений. Этот процесс завершается появлением турбулентного всплеска. После этого вновь возникает ламинарная стадия, затем вновь турбулентный всплеск и т. д., причем промежутки времени между последовательными всплесками не повторяются, а оказываются случайными. Каждый турбулентный всплеск сопровождается сбоем фазы колебаний близких к периодическим

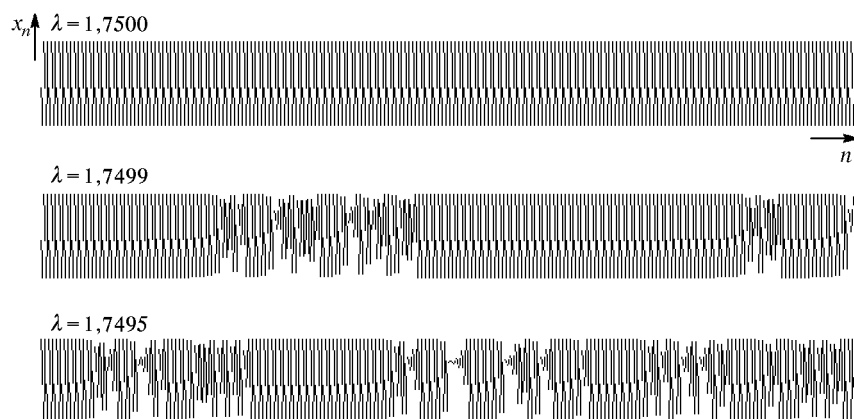


Рис. 17.7. Зависимость переменной x от дискретного времени n для логистического отображения при выходе по параметру из окна периода 3 с возникновением перемежаемости

на ламинарных стадиях. Средняя продолжительность ламинарных стадий уменьшается при удалении от порога касательной бифуркации, а при приближении к нему стремится к бесконечности.

Известно, что присущий логистическому отображению тип динамики с переходом к хаосу через удвоения периода и соответствующим устройством пространства параметров встречается в огромном количестве нелинейных диссипативных систем, относящихся к фейгенбаумовскому классу универсальности. Непременным атрибутом закритической области является присутствие окон устойчивости. Выход же из такого окна в одном из двух возможных направлений сопровождается перемежаемостью, как мы видели на примере логистического отображения. Отсюда следует, что перемежаемость должна быть так же распространена в нелинейных диссипативных системах, как и каскад удвоений периода. В качестве примера на рис. 17.8 иллюстрируется перемежаемость, наблюдаемая в системе Ресслера.

В недавних работах Харви Каплана, американского исследователя из Нью-Йорка, было показано, однако, что для многомерных систем существует дополнительное условие реализации перемежаемости типа I при выходе из окон периодичности в закритической области удвоений периода (Kaplan, 1992, 1993). Оно состоит в

том, что степень сжатия фазового объема за характерный временной период должна быть достаточно велика (рис. 17.9). Для

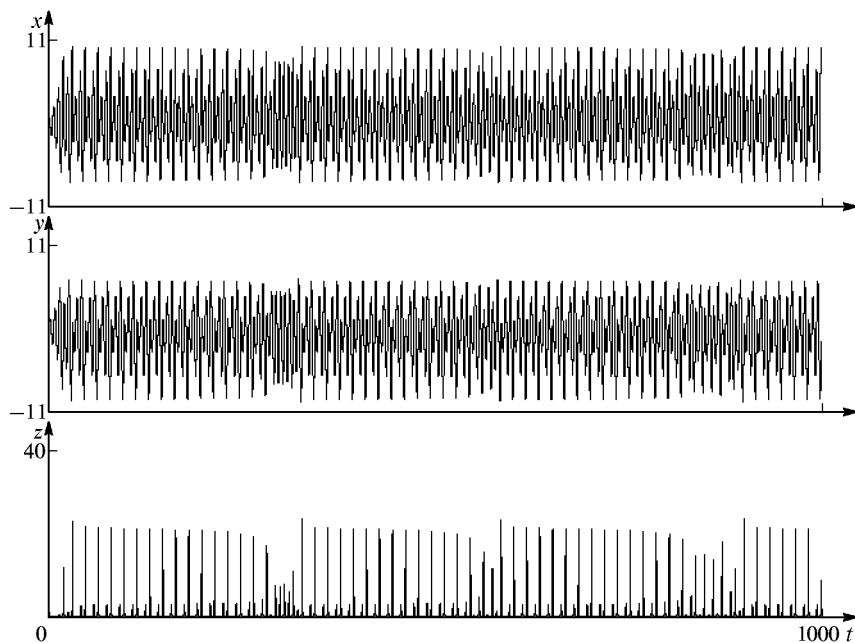


Рис. 17.8. Зависимости динамических переменных от времени в режиме перемежаемости, который реализуется в системе Ресслера $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = x + ay$, $\dot{z} = b + (x - r)z$ при $a = 0,24$, $b = 0,2$, $r = 4,66$

отображений типа Эно Каплан нашел, что перемежаемость «классического» типа при выходе из окна периода 3 наблюдается при значениях якобиана $J = b < 0,00155$, а при больших значениях

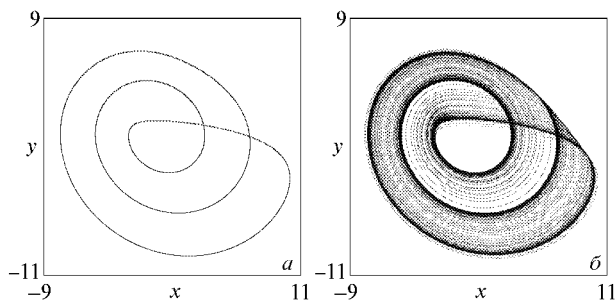


Рис. 17.9. Фазовые портреты в проекции на плоскость переменных x , y , иллюстрирующие переход к хаосу через перемежаемость в системе Ресслера. Значения параметров: $a = 0,24$, $b = 0,2$, $r = 4,68$ (а) и $4,66$ (б)

характер перехода меняется — возникают эффекты типа жестких переходов и гистерезиса. Таким образом, при анализе конкретных систем полезно иметь оценку фактора сжатия фазового пространства за период, чтобы быть уверенным в правильной интерпретации режимов переमेжаемости. Для систем Лоренца и Ресслера степень сжатия за характерный период очень велика, так что условие Каплана заведомо выполняется.

Наличие переमेжаемости не всегда означает хаотическую природу возникающего режима. Альтернативная возможность иллюстрируется на примере отображения Заславского на рис. 17.10. Перемежаемость, реализующаяся при выходе из языка Арнольда че-

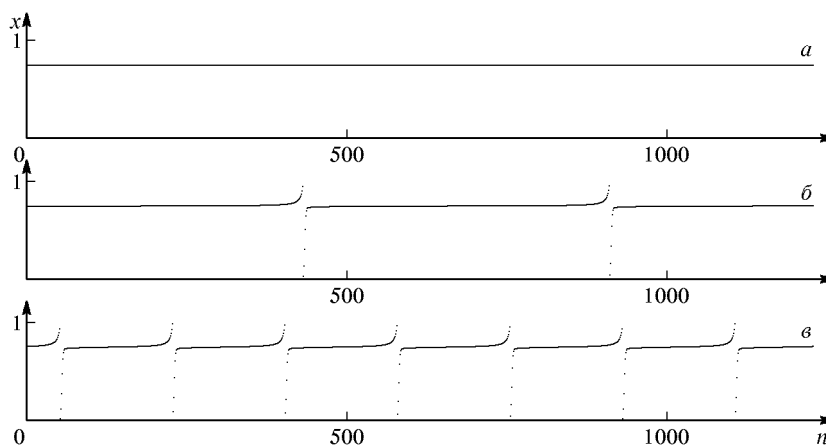


Рис. 17.10. Переход через перемежаемость к квазипериодическому режиму у края языка Арнольда в отображении Заславского $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta + k \sin \varphi_n + d\rho_n$, $\rho_{n+1} = d\rho_n + k \sin \varphi_n$ при $d = 0,3$, $k = 0,5$, $\Delta/2\pi = 0,1136$ (а), $0,1137$ (б), $0,1138$ (в)

рез его край при небольших k , характеризуется *регулярным* чередованием ламинарных стадий и стадий переключения. Фактически это квазипериодический режим. Механизм реинжекции в данном случае очень простой, он связан с периодичностью пространства состояний по фазовой координате. Причина отсутствия хаоса состоит в том, что при выбранном значении параметра $k = 0,5$ динамика на стадиях переключения не обладает высокой чувствительностью по отношению к возмущениям начальных условий.

17.2. Перемежаемость типа I: теория

Перемежаемость возникает в момент касательной бифуркации, соответствующее значение параметра будем называть критической точкой. При приближении к критической точке протяженность ламинарных стадий стремится к бесконечности, так что они состав-

влияют основную, подавляющую часть времени наблюдения. Если рассмотреть очень узкий интервал по параметру, на краю которого находится критическая точка, то в его пределах протяженность ламинарных стадий будет меняться весьма значительно. В то же время, в силу малости вариации параметра, изменением характера динамики на турбулентных стадиях можно пренебречь. Следовательно, сам по себе переход не сопровождается изменением структуры турбулентных всплесков. Поэтому теоретический анализ собственно перехода должен быть сконцентрирован на изучении ламинарных стадий (Pomeau, Manneville, 1980; В.Ну, J. Rudnik, 1982, 1986).

Рассмотрим модельное отображение следующего вида:

$$x' = x + \varepsilon + x^2, \quad (17.3)$$

где ε — управляющий параметр. При $\varepsilon < 0$ оно имеет пару неподвижных точек, устойчивую и неустойчивую. При критическом значении $\varepsilon = 0$ эти точки сливаются, затем исчезают, и на их месте при $\varepsilon > 0$ образуется «коридор».

Если ε положительно и очень мало, то прохождение через коридор занимает очень большое число шагов итераций отображения (17.3). При этом изменение переменной x за один шаг незначительно, что позволяет перейти от разностного уравнения к дифференциальному. Положим

$$\frac{x' - x}{\Delta t} \cong \frac{dx}{dt}, \quad (17.4)$$

где $\Delta t = 1$. Тогда уравнение (17.3) перепишется в виде

$$\dot{x} = \varepsilon + x^2. \quad (17.5)$$

Рассмотрим сначала ситуацию точно в критической точке, $\varepsilon = 0$. Уравнение $\dot{x} = x^2$ без труда интегрируется: $dx/x^2 = dt$, $-1/x = t + C$. Выбирая константу C так, чтобы подчинить решение начальному условию $x|_{t=0} = x_0$, получаем

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} = F_t(x_0). \quad (17.6)$$

Отметим, что при любом положительном начальном значении x_0 решение уходит на бесконечность за конечное время: модель (17.5), как и (17.3), пригодна для описания определенной стадии процесса, но не динамики в целом.

Функция $F_t(x)$ определяет оператор эволюции за время t . Совокупность таких операторов, отвечающих разным значениям параметра t , образует непрерывную группу (группу Ли). Основное

групповое свойство состоит в том, что применение оператора эволюции за время τ_1 и затем оператора эволюции за время τ_2 приводит к такому же результату, как применение оператора эволюции за время $\tau_1 + \tau_2$:

$$F_{\tau_2}(F_{\tau_1}(x)) = F_{\tau_1+\tau_2}(x). \quad (17.7)$$

Действительно,

$$F_{\tau_2}\left(\frac{x}{1-\tau_1 x}\right) = \frac{x/(1-\tau_1 x)}{1-\tau_2 x/(1-\tau_1 x)} = \frac{x}{1-(\tau_1+\tau_2)x} = F_{\tau_1+\tau_2}(x). \quad (17.8)$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. В этом случае имеем $\int dx/(\varepsilon + x^2) = \int dt$, откуда $\varepsilon^{-1/2} \operatorname{arctg}(\varepsilon^{-1/2}x) = t + C$. Подчиняя решение начальному условию $x|_{t=0} = x_0$, находим

$$x(t) = \frac{x_0 + \varepsilon^{1/2} \operatorname{tg}(\varepsilon^{1/2}t)}{1 - x_0 \varepsilon^{-1/2} \operatorname{tg}(\varepsilon^{1/2}t)} = F_t(x_0; \varepsilon). \quad (17.9)$$

Как можно проверить, оператор эволюции (17.9) также удовлетворяет групповому свойству (17.7).

Поскольку нас больше всего интересует асимптотически малая окрестность критической точки, разложим выражение (17.9) в ряд Тейлора по параметру ε , удерживая член первого порядка. Результат выглядит следующим образом:

$$F_\tau(x, \varepsilon) = \frac{x}{1-x\tau} + \varepsilon\tau \frac{1-x\tau + x^2\tau^2/3}{(1-x\tau)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (17.10)$$

В этом приближении эволюция начального состояния x за время τ описывается отображением

$$x' = \frac{x}{1-x\tau} + \varepsilon\tau \frac{1-x\tau + x^2\tau^2/3}{(1-x\tau)^2}. \quad (17.11)$$

Если мы произведем в обеих частях последнего уравнения замену $x = X/\tau$, то оно сводится к виду

$$X' = \frac{X}{1-X\tau} + \varepsilon\tau^2 \frac{1-X + X^2/3}{(1-X)^2}, \quad (17.12)$$

содержащему в качестве единственного параметра комбинацию $\varepsilon\tau^2$. При изменении времени τ в произвольное число раз γ и одновременно изменении параметра ε в $1/\gamma^2$ раз форма оператора эволюции остается неизменной. Отсюда следует, что характерная продолжительность ламинарных стадий у порога возникновения

перемежаемости должна вести себя как $\varepsilon^{-1/2}$. В этом состоит присущее перемежаемости свойство скейлинга. Оно допускает прямую проверку в экспериментах с различными системами и часто служит основанием для интерпретации наблюдаемого в эксперименте или расчетах режима как перемежаемости типа I (рис. 17.11).

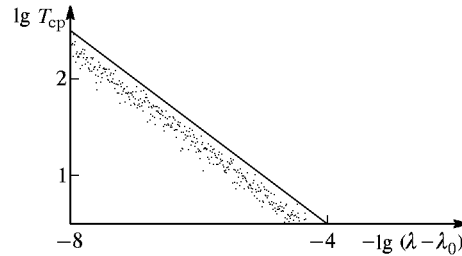


Рис. 17.11. Полученная в компьютерном эксперименте статистика средней длительности ламинарных фаз для перемежаемости в логистическом отображении вблизи края окна периода $3\lambda_0 = 1,75$. На графике, построенном в двойном логарифмическом масштабе, прямая с наклоном $(-1/2)$ отвечает зависимости вида $T_{\text{ср}} \propto (\lambda_0 - \lambda)^{-1/2}$, которую предсказывает теория

Обсудим, как ведет себя ляпуновский показатель вблизи точки перехода к хаосу через перемежаемость.

Пусть мы имеем малое начальное возмущение $\tilde{x}(0)$. Рассмотрим интервал времени T , содержащий большое число N турбулентных всплесков и запишем выражение для ляпуновского показателя:

$$\Lambda \cong \frac{1}{T} \ln \left| \frac{\tilde{x}(T)}{\tilde{x}(0)} \right| = \frac{\ln |\tilde{x}(T)| - \ln |\tilde{x}(0)|}{NT_{\text{ср}}}, \quad (17.13)$$

где $T_{\text{ср}}$ — средняя продолжительность ламинарных стадий, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ ведет себя как $\varepsilon^{-1/2}$. Член $\ln |\tilde{x}(T)|$ достаточно оценить в нулевом порядке по ε . Его можно представить как сумму вкладов от ламинарных и турбулентных стадий. Вклад от турбу-

лентных всплесков будет порядка $\sum_{i=1}^N \ln A_i \cong N \overline{\ln A}$, где A_i — фак-

тор усиления возмущения за время i -го турбулентного всплеска, а чертой обозначено усреднение по всем N всплескам. Эту величину можно считать не зависящей от ε в силу допущения о том, что структура турбулентных всплесков не меняется в рассматриваемом узком интервале изменения параметра. Для ламинарной стадии выпишем уравнение эволюции переменной x вместе с уравнением в вариациях:

$$\dot{x} = \varepsilon + x^2, \quad \dot{\tilde{x}} = 2x\tilde{x}, \quad (17.14)$$

поделим их друг на друга и проинтегрируем. Тогда получаем $\ln |\tilde{x}/\tilde{x}_0| = \ln |(x^2 + \varepsilon)/(x_0^2 + \varepsilon)| \cong \frac{2 \ln |x/x_0|}{\lambda}$, так что сумма по всем ламинарным стадиям даст $2N \ln |x/x_0|$. Подставляя полученные оценки в (17.13) видим, что $\Lambda \cong \frac{(\ln A + 2 \ln |x/x_0|)}{T_{\text{хар}}} = \text{const}/T_{\text{хар}} = \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}$, т. е критический показатель для ляпуновского показателя $1/2$. На рис. 17.12 показан график зависимости ляпуновского показателя от величины отстройки по па-

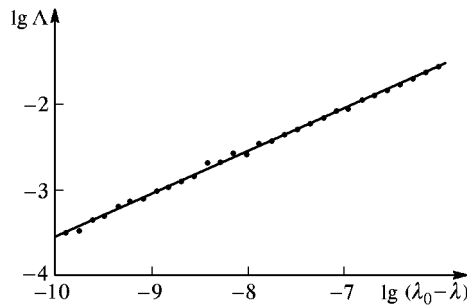


Рис. 17.12. Полученная в компьютерном эксперименте зависимость показателя Ляпунова от величины отклонения параметра от критической точки для перемежаемости в логистическом отображении вблизи края окна периода 3 $\lambda_0 = 1,75$. На графике, построенном в двойном логарифмическом масштабе, прямая с наклоном $1/2$ отвечает теоретической зависимости вида $\Lambda \propto (\lambda_0 - \lambda)^{1/2}$

раметру от критической точки для логистического отображения вблизи края окна периода 3. В двойном логарифмическом масштабе видно, что точки хорошо ложатся на прямую линию с наклоном $1/2$, как и предсказывает теория.

17.3. Ренормгрупповой подход к анализу перемежаемости

Теоретическому анализу перемежаемости можно придать форму, аналогичную теории Фейгенбаума (В.Ну, J.Rudnik, 1982; Hirsch et al., 1982). Выводы, которые при этом получаются, не идут дальше предыдущего раздела. Тем не менее, представляет принципиальный интерес, что оба очень различных по своим проявлениям сценария перехода к хаосу, через удвоения периода и через перемежаемость, находят описание в рамках одного и того же формализма. Это ведет к интересным сопоставлениям и ассоциациям, и, в итоге, к более глубокому пониманию сущности перехода к хаосу.

Запишем исходное отображение $x' = x + x^2 + \varepsilon$ в виде $x' = f(x)$ и, следуя логике рассуждений лекции 15, построим оператор эволюции за два шага итераций: $x'' = f(f(x))$. Далее, произведем перенормировку динамической переменной, подставив в обе ча-

сти последнего соотношения $x = X/\alpha$. Следует подчеркнуть, что использованное ранее правило нормировки функций на единицу в начале координат теперь не годится, поскольку в критической точке $f(0) = 0$. Вместо этого можно потребовать, чтобы вторая производная перенормированной функции равнялась ее значению для исходной $f(x)$. Это обеспечивается выбором константы $\alpha = 2$. Полученную в результате функцию обозначим $f_1(X) = \alpha f(f(X/\alpha))$. Она задает перенормированный оператор эволюции за два временных шага. Повторяя эту процедуру многократно с тем же самым α , получаем рекуррентное функциональное уравнение РГ

$$f_{k+1}(X) = \alpha f_k \left(\frac{X}{\alpha} \right). \quad (17.15)$$

На рис. 17.13 показано, как ведут себя графики для первых членов порождаемой уравнением (17.15) последовательности функций при значении ε в исходном отображении меньшем, равном и большем

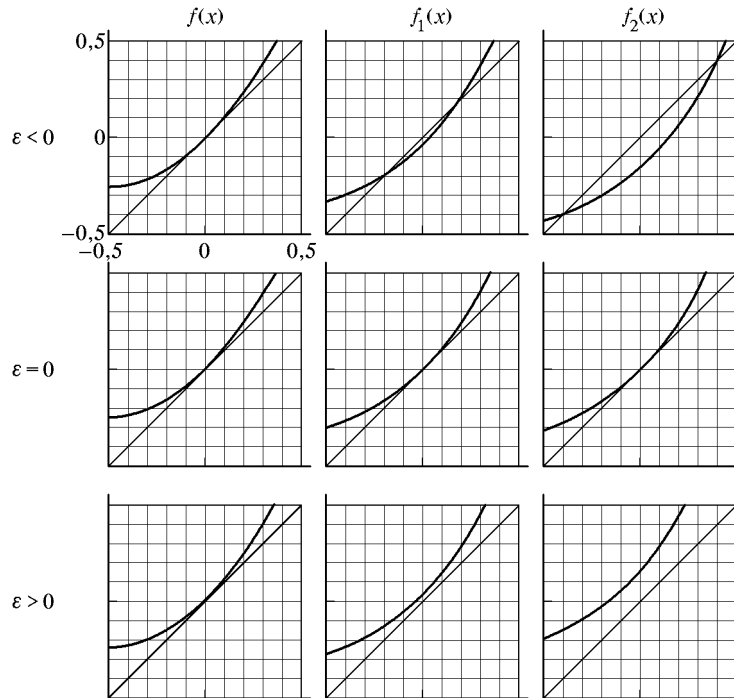


Рис. 17.13. Действие РГ преобразования (17.15) на функцию $f(x)$ при значениях параметра ε меньшем, равном и большем критического

нуля. При $\varepsilon < 0$ с ростом k график опускается шаг за шагом вниз, а при $\varepsilon > 0$ — поднимается вверх, так что зазор между графиком функции и биссектрисой увеличивается. В критической точке $\varepsilon = 0$ вид графика с ростом номера k стабилизируется. Иными словами, последовательность функций $f_k(x)$ сходится к определенному пределу — функции $g(x)$, которая должна удовлетворять уравнению

$$g(X) = \alpha g\left(g\left(\frac{X}{\alpha}\right)\right). \quad (17.16)$$

Оно в точности совпадает по виду с уравнением Фейгенбаума–Цвитановича. Однако дополнительные условия, которым подчинено решение уравнения (17.16), совсем другие. Именно, функция должна обращаться в нуль в начале координат, иметь там производную, равную 1, и разложение в ряд Тейлора должно содержать квадратичный член.

В отличие от удвоенных периода, функция, представляющая собой неподвижную точку уравнения РГ, может быть записана в аналитическом виде. Фактически мы уже нашли ее в предыдущем разделе: $g(X) = X/(1 - X)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при $\alpha = 2$ она удовлетворяет уравнению (17.16).

Неподвижная точка уравнения РГ является седлом и имеет единственное существенное неустойчивое направление. Собственное число и собственный вектор удовлетворяют уравнению, которое совпадает по форме с (15.14):

$$\nu h(x) = \alpha \left[g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(\frac{x}{\alpha}\right) + h\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right], \quad (17.17)$$

но здесь $g(X) = X/(1 - X)$ и $\alpha = 2$. Как можно проверить, решением служит функция, фигурирующая в (17.12) в качестве второго члена:

$$h_0(X) = \frac{1 - X + X^2/3}{(1 - X)^2}, \quad (17.18)$$

а соответствующее собственное число есть $\nu_0 = \delta = 4$. Асимптотическое выражение для перенормированного оператора эволюции за 2^k шагов представляется, следовательно, в виде

$$f_k(x) = g(x) + C\delta^k h_0(x), \quad (17.19)$$

где константа C пропорциональна ε . При уменьшении расстояния от критической точки в $\delta = 4$ раза оператор эволюции за удвоенное число шагов итераций совпадает с исходным. В этом выражается свойство скейлинга. (Из рассмотренной здесь версии РГ анализа оно получается в менее общем виде, чем сформулировано в конце предыдущего раздела: там речь шла о пересчете масштаба времени на произвольный фактор γ , а не только об удвоении.)