

Лекция 14

СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ. ОБЩАЯ ДИСКУССИЯ

Как известно, в уравнениях динамических систем обычно присутствуют параметры — величины, которые считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима. Можно представить себе, что система заключена в черный ящик, на котором имеется несколько ручек настройки. Предположим, что при одном положении ручек наблюдается регулярный режим динамики, например, периодические колебания, а при другом — хаос. Если мы плавно меняем настройку так, чтобы перейти от первой ситуации ко второй (рис. 14.1), то какой будет на пути к хаосу последовательность



Рис. 14.1. К понятию сценария перехода к хаосу

бифуркаций — событий, состоящих в качественном изменении характера наблюдаемого режима? Об этой последовательности бифуркаций принято говорить как о *сценарии перехода к хаосу*. При этом подразумевается, что имеется сравнительно немного сценариев, являющихся в определенном смысле слова типичными, так что проблема их классификации и изучения не является необозримой.

Общепризнанно, что отправным пунктом в исследовании проблемы перехода к хаосу послужила работа Л. Д. Ландау, опубликованная в 1944 г. В ней ставится вопрос о том, как возникает турбулентность при увеличении числа Рейнольдса, основного управляющего параметра в гидродинамических задачах. Согласно предложенному Ландау сценарию, первичное течение теряет устойчивость по отношению к колебательному возмущению на некоторой частоте, затем возникшее осциллирующее течение в свою

очередь становится неустойчивым по отношению к возмущению на другой частоте и т. д. В результате большого числа бифуркаций, которые сопровождаются возникновением все новых и новых частот, находящихся в иррациональных отношениях, возникает сложный динамический режим — турбулентность. Несмотря на то, что речь идет о гидродинамической турбулентности, аргументация носит столь общий характер, что ее можно с равным основанием отнести и к другим диссипативным динамическим системам с многомерным фазовым пространством. Несколько позднее аналогичные представления были развиты немецким математиком Эберхардом Хопфом (Hopf, 1948). Он предложил также конкретную модельную систему, демонстрирующую усложнение динамики в результате последовательного рождения составляющих с несоизмеримыми частотами.

В начале 70-х годов анализ Ландау и Хопфа был подвергнут критике в работе исследователей из Франции и Голландии Дэвида Рюэля и Флориса Такенса. Согласно их утверждению, после рождения первых трех (в другой версии теоремы — после четырех) составляющих с несоизмеримыми частотами может возникать странный аттрактор, который характеризуется неустойчивостью принадлежащих ему фазовых траекторий (Ruelle, Takens, 1971; Newhouse, Ruelle, Takens, 1978). По Рюэлю и Такенсу, странный аттрактор и есть математический образ турбулентного движения. Ситуация, когда имеет место большее число бифуркаций не то чтобы невозможна, но атипична, т. е. практически невероятна.

Хотя в литературе часто встречается словосочетание «сценарий Рюэля и Такенса», его нельзя признать вполне правомерным, поскольку на самом деле они не дали явного описания последовательности бифуркаций на пути от порядка к хаосу. Что же в действительности ими было доказано? Если сформулировать основной результат на физическом языке, то он сводится к следующему. Пусть мы имеем $M \geq 3$ диссипативных систем, каждая из которых демонстрирует периодические автоколебания на своей частоте, причем все частоты находятся в иррациональных отношениях. В этом случае система, составленная из несвязанных подсистем, будет иметь аттрактором M -мерный тор. Введем теперь связь между подсистемами. Согласно Рюэлю и Такенсу, при сколь угодно малой величине связи можно так подобрать вид этой связи, что реализуется странный аттрактор, и динамика будет хаотической. Ими доказан даже более сильный результат. Представим себе пространство функций, которые стоят в правых частях динамических уравнений системы. Утверждается, что в этом пространстве множество точек, соответствующих хаотической динамике, является всюду плотным в сколь угодно малой окрестности точки, отвечающей отсутствию связи.

Первоначальная интерпретация работы Рюэля и Такенса не критически настроенными исследователями состояла в том, что появление третьей частотной составляющей в наблюдаемом спектре колебаний системы должно сопровождаться немедленным рождением хаоса. Как выяснилось, проблема на самом деле оказалась куда более сложной и тонкой.

Во-первых, были приведены убедительные примеры реалистичных систем, в которых, в противоположность заключениям Рюэля и Такенса, наблюдаются квазипериодические режимы с числом несоизмеримых частот более 3 (Tavakol, Tworkowski, 1984; Grebogi et al., 1985; C. Vaesens et al., 1991). Оказалось, что при достаточно слабой связи подсистем это весьма распространенная ситуация.

В работе Grebogi et al., 1985 был предпринят численный эксперимент с модельной системой, описывающей динамику с тремя несоизмеримыми частотами:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + w_1 + kP_1(\theta_n, \varphi_n) \pmod{2\pi}, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + w_2 + kP_2(\theta_n, \varphi_n) \pmod{2\pi},\end{aligned}\tag{14.1}$$

где переменные θ и φ имеют смысл фаз, одна частота отвечает шагу дискретного времени, а вторая и третья задаются, соответственно, параметрами w_1 и w_2 . Функции $P_1(\theta, \varphi)$ и $P_2(\theta, \varphi)$ имеют период 2π по каждому аргументу и представляются рядами Фурье. Была проведена большая серия расчетов. Задав величины коэффициентов Фурье и параметры w_1 и w_2 случайным образом, исследователи определяли характер реализующегося режима по показателям Ляпунова:

- $\Lambda_{1,2} < 0$ — периодический,
- $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ — 2-х частотный квазипериодический, 2-тор,
- $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$ — 3-х частотный квазипериодический, 3-тор,
- $\Lambda_1 > 0$ — хаос.

На рис. 14.2 приведена диаграмма, где сопоставляется относительная доля испытаний, в которых обнаруживался тот или иной тип ре-

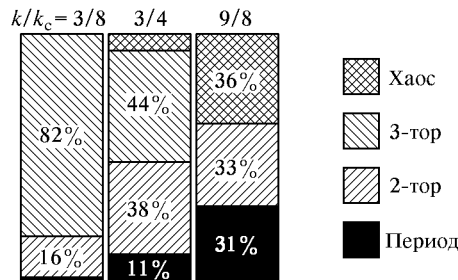


Рис. 14.2. Относительная доля испытаний, в которых обнаруживался различный тип режима при случайном выборе параметров и функций в модельном отображении (14.1) (Grebogi et al., 1985). Величина параметра $k = k_c$ отвечает моменту потери обратимости отображения

жима. При малом уровне возмущения k доминирует трехчастотная квазипериодичность. С ростом уровня возмущения растет доля периодических и хаотических режимов. При $k > k_c$, где k_c отвечает моменту потери обратимости модельного отображения, трехчастотная квазипериодичность становится невозможной.

Надо подчеркнуть, что сказанное противоречит не утверждению теоремы Рюэля и Такенса, как таковой, а, скорее, интерпретации понятия типичности, которое оказалось не вполне адекватным. Действительно, всюду плотное множество совсем не обязательно имеет заметно отличную от нуля меру. Поэтому присутствие в пространстве систем плотного множества, отвечающего наличию хаоса, еще не означает, что хаос будет наблюдаться с высокой вероятностью.

Во-вторых, после опубликованной в 1984 г. работы группы из Мэрилендского университета (Grebogi et al., 1984) и последующих исследований стало ясно, что сценарий перехода к хаосу через квазипериодические режимы может включать, как промежуточный этап, образование *странных нехаотических аттракторов*. В интерпретации мэрилендской группы, термин «странный» относится к геометрической структуре аттрактора, который представляет собой фрактальный объект, а термин «нехаотический» указывает на отсутствие чувствительной зависимости динамики от начальных условий: среди ляпуновских показателей аттрактора нет положительных.

С другой стороны, подвергнутое критике предположение о том, что число бифуркаций на пути к хаосу может быть бесконечным, оказалось справедливым, хотя и для другого сценария. Речь идет о переходе к хаосу через каскад (бесконечную последовательность) бифуркаций удвоения периода. Около 1976 г. американский физик Митчел Фейгенбаум, работавший в Лос-Аламосской национальной лаборатории США, обнаружил ряд замечательных закономерностей, сопровождающих этот тип перехода к хаосу (Feigenbaum, 1978, 1979). О нем говорят теперь как о *сценарии Фейгенбаума*, и это наименование можно считать заслуженным. Хотя Фейгенбаум не является первооткрывателем удвоений периода, описанных и изучавшихся до него многими исследователями (Мау, 1986), он первым осознал присущие этому сценарию свойства *универсальности* и *скейлинга* (масштабного подобия) и разработал их теоретическое обоснование, привнеся в нелинейную динамику метод *ренормализационной группы* (сокращенно ренормгруппы или РГ).

Сущность концепции универсальности состоит в том, что имеется обширное множество нелинейных диссипативных систем различной природы (*класс универсальности*), которые не просто демонстрируют одну и ту же последовательность бифуркаций, но проявляют у порога возникновения хаоса одни и те же количественные закономерности скейлинга с присущими данному классу универсальности определенными значениями масштабных констант.

Метод ренормгруппы, концепции универсальности и скейлинга ранее были развиты в теории фазовых переходов. В 1982 г. американский физик Кеннет Вильсон получил Нобелевскую премию за вклад в разработку этих концепций. При приближении температуры вещества к критической точке фазового перехода T_c корреляционная длина флуктуаций возрастает и становится большой по сравнению с межатомным расстоянием. В широком интервале пространственных масштабов поведение флуктуаций становится не зависящим от их масштаба и не чувствительным к деталям межатомных взаимодействий, приобретая универсальные свойства. Помимо прочего, это делает продуктивным изучение фазовых переходов с помощью модельных систем, огрубляющих детали локальных взаимодействий из соображений удобства анализа, но сохраняющих интересующий тип критического поведения.

Как оказалось, аналогичный подход плодотворен и в нелинейной динамике при рассмотрении проблемы возникновения хаоса. Представим себе динамическую систему, в которой при переходе параметра через некоторое критическое значение наблюдается мягкое (без скачка) рождение хаоса. В силу непрерывности динамических уравнений по параметру, обнаружить различие между регулярным и хаотическим режимами, реализующимися в ε -окрестности точки перехода, можно только при их наблюдении за достаточно большое время $T(\varepsilon)$. Очевидно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$. Сужая рассматриваемую окрестность критической точки, можно добиться того, чтобы временной масштаб $T(\varepsilon)$ намного превышал все величины с размерностью времени, фигурирующие в уравнениях системы. С точки зрения трансформации природы режима в узкой окрестности точки перехода, локальные во времени детали динамики, как можно ожидать, становятся не существенными, и собственно переход должен носить универсальный характер¹⁾. В этом случае для феноменологического описания динамики нелинейных систем у порога хаоса естественно использовать наиболее простые модели, обладающие нужным типом критического поведения, т. е. правильно передающие динамику на больших временных масштабах. Ясно, что конструирование таких моделей следует рассматривать как одну из важных задач теории.

В контексте нелинейной динамики и перехода к хаосу идея метода ренормгруппы состоит в следующем. Предположим, что мы имеем зависящий от параметров оператор, описывающий эволюцию состояния динамической системы на некотором временном интервале. Используя его, мы можем построить оператор эволюции на некотором большем временном интервале. Далее по-

¹⁾ Это рассуждение не исключает возможность существования разных классов универсальности, так что одинаковые закономерности могут быть справедливыми лишь в пределах одного определенного класса.

средством масштабных замен переменных мы стараемся добиться того, чтобы новый оператор эволюции по возможности совпадал со старым. Если при некоторых значениях параметров это удастся сделать, то процедуру можно повторять многократно, получая последовательность операторов эволюции для все больших и больших временных интервалов. Процедура перехода от старого оператора к новому, перенормированному, называется РГ преобразованием, а набор значений параметров, о котором мы говорили, задает расположение критической точки. В критической точке структура операторов эволюции на больших временах оказывается обусловленной не конкретным видом исходного оператора системы, а структурой РГ преобразования. В этом и состоит универсальность. Поскольку в критической точке получаемые при многократном применении РГ преобразования операторы эволюции оказываются одинаковыми с точностью до масштабной замены переменных, система должна демонстрировать на различных временах подобную динамику с соответствующим пересчетом масштаба динамических переменных, проявляя свойство скейлинга. При выходе по параметрам из критической точки возникающее возмущение оператора эволюции будет трансформироваться при итерациях РГ преобразования вполне определенным, универсальным образом. В результате топография пространства параметров вблизи критической точки также обладает свойствами универсальности и скейлинга.

Работа Фейгенбаума показала, что проблема сценариев возникновения хаоса не ограничивается качественной стороной, т. е. не сводится к перечислению возможных последовательностей бифуркаций, а имеет количественный аспект. Закономерности, аналогичные фейгенбаумовским, но характеризующиеся другими значениями масштабных констант, были в дальнейшем обнаружены для целого ряда типов критического поведения, возникающих при многопараметрическом анализе перехода к хаосу через удвоения периода (Kuznetsov et al., 1997; Кузнецов и др., 1997). Количественные закономерности и универсальные константы найдены также для многих ситуаций, отвечающих переходу к хаосу через квазипериодические режимы (Shenker, 1982; Feigenbaum et al., 1982; Rand et al., 1982), хотя в этом случае полная картина оказывается очень сложной, и многие ее аспекты остаются до сих пор до конца не изученными.

В 1980 г. появилось сообщение французских исследователей И. Помо и П. Манневилля, положившее начало изучению группы сценариев перехода к хаосу через перемежаемость (Pomeau, Manneville, 1980). В гидродинамике давно известна так называемая перемежающаяся турбулентность, когда течение в определенных пространственных областях имеет плавный, ламинарный характер, но они чередуются с областями нерегулярного, турбулентного

течения. Благодаря тому, что турбулентные области перемещаются, меняют форму, возникают и исчезают, перемежающийся характер носит также зависимость наблюдаемых величин от времени в фиксированной точке пространства (рис. 14.3). Помо и Манневилль указали несколько возможных ситуаций, когда в динамических системах (в том числе со сравнительно небольшой размерностью фазового пространства) может возникнуть перемежаемость, и наметили классификацию, введя в рассмотрение три

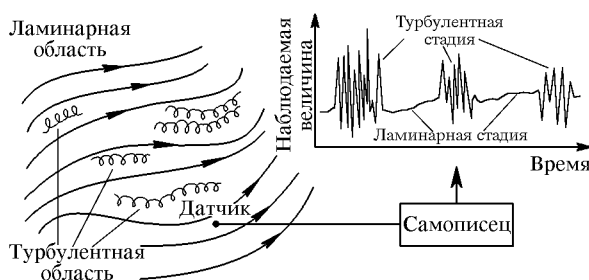


Рис. 14.3. Перемежающаяся турбулентность в гидродинамическом течении

типа перемежаемости. В дальнейшем свойства такого рода переходов были исследованы более подробно. В частности, для перемежаемости типа I и III был развит ренормгрупповой анализ, аналогичный теории Фейгенбаума²⁾.

Итак, в итоге изучения вопроса о переходе динамических систем к хаосу сложилось представление о трех основных сценариях, а именно: через каскад удвоений периода, перемежаемость и квазипериодические режимы. Оставшаяся часть нашего курса будет посвящена рассмотрению этих сценариев и, соответствующих им особенностей сложной динамики нелинейных систем в области перехода от порядка к хаосу.

Обсудим, почему типичными оказываются именно перечисленные выше сценарии и в каком отношении друг к другу они находятся.

Предположим сначала, что в системе реализуется простейший устойчивый периодический режим динамики, т. е. предельный цикл. Чтобы увидеть, что с ним может произойти при изменении параметров, воспользуемся методом сечения Пуанкаре. Пусть для простоты цикл «живет» в трехмерном фазовом пространстве, тогда имеем двумерное отображение Пуанкаре

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (14.2)$$

²⁾ Заметим, что вопрос об отношении перехода к хаосу по Помо–Манневиллю к перемежающейся турбулентности в общем случае остается неясным, хотя этот феномен и сыграл роль толчка для развития всей концепции.

Точка, где предельный цикл протыкает поверхность сечения, есть неподвижная точка этого отображения: $x_0 = f(x_0, y_0)$, $y_0 = g(x_0, y_0)$. Исследование на устойчивость заключается в том, что мы подставляем в (14.2) $x = x_0 + \tilde{x}$, $y = y_0 + \tilde{y}$ и, удерживая члены первого порядка, получаем

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad (14.3)$$

где

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби. Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения этой матрицы:

$$\mu_s \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2. \quad (14.4)$$

Если ввести след и детерминант матрицы $\hat{\mathbf{J}}$, соответственно,

$$\begin{aligned} S &= f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0), \\ J &= f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (14.5)$$

то собственные числа получаются как корни квадратного уравнения

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \quad (14.6)$$

Именно,

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}. \quad (14.7)$$

Произвольный вектор возмущения представляется в виде линейной комбинации двух собственных векторов. При каждом обороте предельного цикла возмущение, отвечающее каждому собственному вектору, умножается на соответствующее собственное число — мультипликатор μ . Поэтому цикл устойчив, если оба мультипликатора по модулю меньше единицы, и неустойчив, если хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы. Две пограничные линии области устойчивости на плоскости (S, J) можно получить из (14.6), полагая $\mu = 1$ или $\mu = -1$, что дает, соответственно,

$$1 - S + J = 0 \quad (14.8)$$

или

$$1 + S + J = 0. \quad (14.9)$$

Третья пограничная линия находится из соотношения (14.7): если под знаком квадратного корня стоит отрицательное число, то модуль мультипликатора будет единичным при

$$J = 1. \quad (14.10)$$

Область внутри треугольника, образованного линиями (14.8)–(14.10), есть область устойчивости.

Предположим, что наша система содержит параметр A . Когда мы варьируем этот параметр, будут изменяться координаты неподвижной точки x_0, y_0 , и, соответственно, след и детерминант матрицы Якоби: $S = S(A)$, $J = J(A)$. При этом на плоскости (S, J) мы будем двигаться вдоль некоторой кривой. Ясно, что ти-

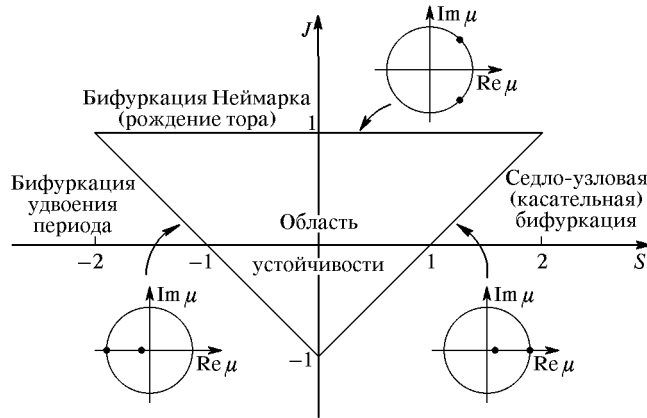


Рис. 14.4. Область устойчивости предельного цикла на плоскости след–детерминант матрицы Якоби

пичным надо признать выход из треугольника устойчивости через одну из его сторон (рис. 14.4).

Предположим сначала, что выход осуществляется через левую границу треугольника. На пороге потери устойчивости мультипликатор равен минус единице. Это значит, что при однократном обходе цикла малое возмущение меняет знак (рис. 14.5a). Чтобы траектория замкнулась, нужно совершить еще один обход, так что период вновь возникшего движения оказывается вдвое больше, чем у исходного.

Если присущая системе нелинейность такова, что при увеличении амплитуды возмущения происходит его стабилизация, то результатом бифуркации будет рождение цикла с периодом, вдвое большим исходного. Это бифуркация удвоения периода. Очень часто при дальнейшем изменении параметра за ней вновь следуют бифуркации такой же природы. Последовательность бифуркационных значений параметра накапливается к определенному пределу,

критической точке, которая является в определенном смысле границей хаоса. Это сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода — сценарий Фейгенбаума.

Может встретиться другая ситуация, когда нелинейность способствует ускорению роста возмущения и уходу системы от ставшей неустойчивой периодической орбиты. В этом случае, когда



Рис. 14.5. Поведение близкой к предельному циклу траектории на трех границах треугольника устойчивости

мы подходим к точке бифуркации, к рассматриваемому циклу приближается неустойчивый цикл удвоенного периода, который сливается с исходным циклом в точке бифуркации и, как говорят, передает ему свою неустойчивость. После бифуркации наблюдается уход близлежащих траекторий от неустойчивого цикла в удаленные области фазового пространства. Может случиться, что динамика в этих удаленных областях такова, что через некоторое время траектория возвращается в окрестность неустойчивого цикла, тогда она останется вблизи него в течение некоторого времени, вновь уйдет, затем вновь вернется и т. д. Если такая реинжек-



Рис. 14.6. Бифуркация удвоения периода: мягкая, нормальная, суперкритическая

ция траектории в окрестность неустойчивого цикла имеет место, и если динамика в удаленных областях фазового пространства характеризуется наличием неустойчивости по отношению к возмущению начальных условий, то это приводит к возникновению хаотического режима перемежающегося типа. Помо и Манневилль обозначают его как перемежаемость типа III.

Рассмотренные варианты бифуркаций наглядно иллюстрируются с помощью одномерных отображений (рис. 14.6 и 14.7). Та-

кая возможность связана с тем, что анализируемая граница потери устойчивости пересекает ось $J = 0$, которую можно трактовать как соответствующую случаю одномерных отображений.

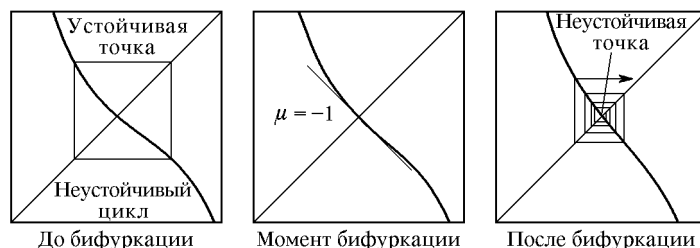


Рис. 14.7. Субкритическая бифуркация удвоения периода

Пусть теперь выход из треугольника устойчивости осуществляется через правую сторону. Тогда на пороге потери устойчивости мультипликатор обращается в плюс единицу. При однократном обходе цикла возмущенная траектория почти замыкается (рис. 14.5б). Чтобы выяснить, как трансформируется динамика, оказывается необходимым обязательно учитывать нелинейность. Когда мы движемся к точке бифуркации, к устойчивому предельному циклу приближается неустойчивый цикл; в точке бифуркации оба цикла сливаются и исчезают. Таким образом, в рассматриваемой области фазового пространства вообще не остается периодических орбит.

Проясняет ситуацию рассмотрение одномерного отображения. (Это оправдано, поскольку, как и в предыдущем случае, рассматриваемая сторона треугольника устойчивости пересекает ось $J = 0$.) График отображения до бифуркации, в момент ее и после нее показан на рис. 14.8. Для одномерного отображения бифуркация состоит в слиянии и исчезновении пары неподвижных точек. В мо-

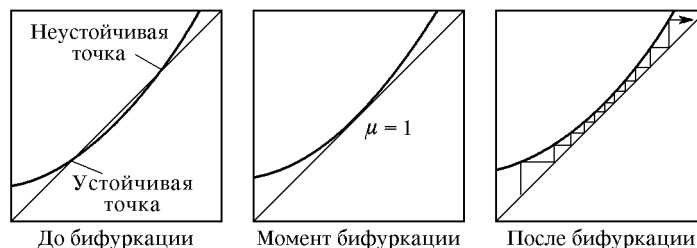


Рис. 14.8. Касательная бифуркация

мент бифуркации график касается биссектрисы, что определяет ее название — *касательная бифуркация*. После бифуркации на месте исчезнувшей пары неподвижных точек остается узкий «коридор», прохождение которого изображающей точкой требует тем

большого числа итераций, чем ближе мы находимся к точке бифуркации. После прохождения «коридора» траектория уходит в удаленные области фазового пространства. Если динамика в этих удаленных областях характеризуется неустойчивостью по отношению к возмущению начальных условий и если обеспечена реинжекция, т. е. через некоторое время траектория оказывается вновь на входе в «коридор», то наблюдается переход к хаосу через перемежаемость типа I по Помо и Манневиллю. Прохождение через «коридор» интерпретируется как ламинарная стадия процесса, а блуждание в удаленных областях фазового пространства как турбулентная стадия.

Наконец, третий вариант выхода из треугольника устойчивости отвечает пересечению его верхней границы $J = 1$. При этом пара комплексно-сопряженных мультипликаторов μ и μ^* переходит через единичную окружность. Возмущенная траектория извивается вокруг теряющего устойчивость предельного цикла (рис. 14.56), причем угол поворота за один обход определяется аргументом комплексного числа μ . Как видно из соотношения (14.7), $\mu_{1,2} = S/2 \pm i(1 - S^2/4)^{1/2}$, так что аргумент зависит от того, в какой именно точке мы пересекаем сторону треугольника. Если величина $(\arg \mu)/2\pi$ выражается рациональным числом p/q , то возмущенная орбита замыкается после q обходов.

Как и в случае $\mu = -1$, результат бифуркации определяется тем, способствует нелинейность стабилизации возмущения или же его усилению.

В первом случае происходит мягкая бифуркация рождения тора, если $(\arg \mu)/2\pi$ иррациональное число, или периодической орбиты — резонансного цикла на торе, если оно рациональное. Области периодичности имеют вид языков, подходящих сверху к линии $J = 1$, а в промежутках между языками реализуются квазипериодические режимы. Бифуркация рождения тора из предельного цикла носит название *бифуркации Неймарка*. Дальнейшая эволюция аттрактора при изменении управляющего параметра может быть разнообразной и сложной, но в общем можно сказать, что реализуется та ситуация, о которой говорят как о переходе к хаосу через квазипериодичность.

Второй случай, когда нелинейность способствует раскачке возмущений, отвечает уходу траектории от потерявшего устойчивость предельного цикла в удаленные области фазового пространства. Если динамика там хаотическая и если имеет место реинжекция с возвратом траектории в окрестность неустойчивого цикла, то реализуется перемежаемость типа II по Помо и Манневиллю. Это наиболее сложный и наименее изученный из трех типов перемежаемости.

Сводка всех перечисленных возможностей потери устойчивости предельного цикла и ассоциирующихся с ними сценариев возникновения хаоса дается на рис. 14.9.

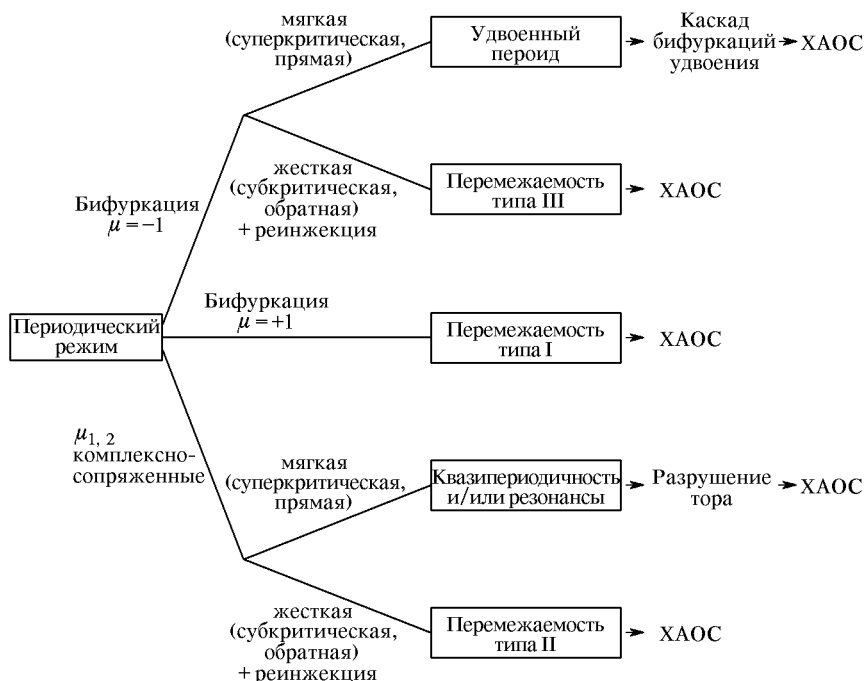


Рис. 14.9. Различные пути потери устойчивости предельного цикла и ассоциирующиеся с ними сценарии возникновения хаоса

Оказывается, что и при большей размерности фазового пространства проведенный анализ остается в силе, в том смысле, что типичными будут три варианта линейной потери устойчивости предельного цикла (с переходом мультипликатора через единицу, минус единицу, или пары комплексно-сопряженных мультипликаторов через единичную окружность) и те же варианты действия нелинейности на динамику возмущений вблизи бифуркаций, какие мы обсудили. Поэтому намеченная классификация сценариев перехода к хаосу оказывается весьма общей. В следующих лекциях мы обратимся к более детальному рассмотрению различных аспектов динамики, связанной с этими сценариями.